



XIX Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада
районный тур, решения

2011
12
ноября

11 класс

1. 25 ноября произойдет частное солнечное затмение, полоса видимости которого включает всю Антарктиду. Максимальная фаза затмения состоится в 6 часов 20 минут по Всемирному времени. Будет ли видно затмение (при условии, конечно, хорошей погоды) на чилийской антарктической станции «Лейтенант Артуро Пароди», имеющей географические координаты $80^{\circ}19'$ ю.ш., $81^{\circ}18'$ з.д.? Ответ обоснуйте.

Решение:

Рассчитаем местное время, на которое придется максимальная фаза затмения. Как известно, местное время на различных меридианах различается на величину, равную разности долгот этих меридианов. Переведем долготу в часы и минуты ($1^h = 15^{\circ}$): $81^{\circ}18' = 5^h 25^m$. Т.к. долгота западная, то в момент максимальной фазы затмения местное время на станции будет примерно равно 1^h (ночи). Можно было бы предположить, что затмение видно не будет. Но станция находится за полярным кругом и, возможно, в это время на станции полярный день. Оценим, будет ли Солнце над горизонтом в полночь по местному времени станции. Высота светила в нижней кульминации $h_{min} = |\delta| + |\varphi| - 90^{\circ}$, где δ — склонение светила, а φ — широта места наблюдения. Оценим склонение Солнца. Будем считать, что склонение изменяется равномерно от 0° 21 сентября до $-23^{\circ}.5$ 22 декабря, т.е. уменьшается примерно на $0^{\circ}.26$ в сутки. Тогда можно считать, что 25 ноября склонение Солнца составит примерно -16° . Следовательно высота Солнца над горизонтом в нижней кульминации, т.е. в полночь, на станции будет равна $h_{min} = 16^{\circ} + 80^{\circ}19' - 90^{\circ} = 6^{\circ}19'$. Таким образом Солнце даже в полночь будет над горизонтом, а следовательно в час ночи **затмение можно будет наблюдать.**

Примечание. На самом деле склонение Солнца изменяется по синусоиде, поэтому оно быстро уменьшается в окрестности равноденствия, а в течение последнего месяца перед солнцестоянием почти не изменяется, реальное склонение Солнца 25 ноября равно $-20^{\circ}.5$, следовательно, минимальная высота его над горизонтом оказывается еще больше.

2. В течение этого ноября видимый диаметр Юпитера уменьшится от $50''$ до $47''$. Чему будет равна видимая звездная величина Юпитера в конце ноября, если в начале месяца она равнялась $-2^m.9$?

Решение:

Угловой размер Юпитера α изменится из-за изменения расстояния r от Юпитера до Земли как $\alpha \propto 1/r$. Освещенность E , создаваемая Юпитером на Земле, зависит от расстояния до него как

$$E \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow E \propto \alpha^2.$$

Отсюда, применяя формулу Погсона, получаем разность звездных величин

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{E_1}{E_2} = -2.5 \lg \left(\frac{50}{47} \right)^2 = -5 \lg \frac{50}{47} =$$

$$= -5 \frac{\ln(1 + 3/47)}{\ln 10} \approx -5 \frac{3/47}{2.3} \approx -0.15$$

и получаем, что в конце ноября звездная величина Юпитера будет равна $-2^m.75$.

3. Оцените среднюю орбитальную скорость открытой 200 лет назад знаменитой «Большой кометы 1811 года», если период ее обращения вокруг Солнца $P \approx 3 \cdot 10^3$ лет, а эксцентриситет ее орбиты $e \approx 1$.

Решение:

Поскольку эксцентриситет орбиты близок к единице, очевидно, что кометная орбита представляет собой очень сильно вытянутый эллипс, который без особой потери точности можно считать отрезком прямой. Тогда полная длина l такой орбиты связана с большой полуосью a простым соотношением $l = 4a$. Большую полуось a можно найти из III закона Кеплера:

$$a = \sqrt[3]{P^2} \approx \sqrt[3]{(3 \cdot 10^3)^2} \approx 2 \cdot 10^2 \text{ а.е.}$$

Тогда $l \approx 4 \cdot 2 \cdot 10^2 = 8 \cdot 10^2$ а.е. и, следовательно средняя орбитальная скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{l}{P} \approx \frac{8 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^3} \approx \frac{1}{4} \text{ а.е./год} \approx 1 \text{ км/с.}$$

4. Оцените частотный диапазон, в котором может работать радиотелескоп-рефлектор с антенной диаметром 10 м, сделанной из металлической сетки с ячейками размером 1 см.

Решение:

Известно, что для того, чтобы работали законы геометрической оптики, необходимо, чтобы рабочая длина волны принимаемого излучения была много меньше размеров телескопа, а размеры неоднородностей отражающей поверхности телескопа были много меньше длины волны. «Много меньше» — это примерно раз в 10. Так как размеры ячеек сетки 1 см, то минимальную рабочую длину волны можно оценить в 10 см. Максимальную рабочую длину волны можно оценить в 1 м, т.к. диаметр антенны 10 м. Переведем длины волн λ в частоты ν .

$$\nu[\text{Гц}] = \frac{c[\text{м/с}]}{\lambda[\text{м}]}.$$

Тогда минимальная частота

$$\nu_{\text{min}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1} = 3 \cdot 10^8 \text{ Гц,}$$

а максимальная

$$\nu_{\text{max}} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{-1}} = 3 \cdot 10^9 \text{ Гц.}$$

5. Три звезды с массами, равными массе Солнца, находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной 1 а.е. Какими должны быть скорости звезд, чтобы их взаимное расположение не изменялось со временем?

Решение:

Так как звезды расположены в вершинах равностороннего треугольника, то можно считать, что результирующая гравитационная сила, действующая на каждую звезду направлена в сторону барицентра системы, которая в данном случае совпадает и с геометрическим центром системы (что очевидно). Тогда можно определить расстояние от каждой из звезд до барицентра — оно составляет $a = \frac{r}{\sqrt{3}}$, где $r = 1$ а.е. — сторона равностороннего треугольника.

Силы, с которыми первая звезда притягивается ко второй и к третьей равны между собой по модулю и равны $F_0 = G \frac{m^2}{r^2}$. Однако направлены они в разные стороны под углом в 60° .

После определения равнодействующей этих двух сил получается, что она направлена к барицентру, а по модулю составляет $F = 2 \cdot F_0 \cdot \cos 30^\circ = F_0 \cdot \sqrt{3}$, т.е. можно полагать, что в барицентре расположен виртуальный притягивающий центр с массой, равной $M_* = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot m$, расположенный на расстоянии a от каждой звезды.

Условие неизменности взаимного расположения звезд может быть выполнено только в случае движения звезд по круговым орбитам. Такое движение возможно только с круговой скоростью, т.е. с первой космической скоростью, равной $V_I = \sqrt{\frac{GM_*}{a}}$. Тогда, подставляя найденные выше величины, получаем:

$$V = \sqrt{\frac{3Gm}{r}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1.5 \cdot 10^{11}}} \approx 3 \cdot 10^4,$$

т.е. примерно **30 км/с**.

Можно отметить, что вычисления в задаче можно существенно упростить, если использовать систему единиц, в которой единицей массы является масса Солнца, единицей времени — год, единицей расстояния — астрономическая единица. Тогда $G = 4\pi^2$ в соответствующих единицах, а скорость звезд оказывается равной 2π а.е./год, т.е. совпадает с орбитальной скоростью Земли (что же получено выше).